УНІВЕРСИТЕТ імені АЛЬФРЕДА НОБЕЛЯ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник завдань для самостійної роботи

УНІВЕРСИТЕТ імені АЛЬФРЕДА НОБЕЛЯ

КАФЕДРА ЕКОНОМІКИ ТА МОДЕЛЮВАННЯ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник завдань для самостійної роботи

Дніпро
2017

УДК 510.2
В 95

Рекомендовано
вченою радою Університету
імені Альфреда Нобеля
(протокол № 2 від 21 квітня 2017 року)

Рецензент:

О.А. Паршина, доктор економічних наук,
професор, завідувач кафедри економіки та моделювання бізнес-процесів
Університету імені Альфреда Нобеля.

Укладачі:

О.Г. Холод, кандидат технічних наук, доцент;
Г.Г. Швачич, доктор технічних наук, професор;
І.М. Козирєва, старший викладач;
Л.І. Ярмоленко, старший викладач.

В 95 Вища та прикладна математика: збірник завдань для самостійної роботи / О.Г. Холод, Г.Г. Швачич, І.М. Козирєва, Л.І. Ярмоленко. – Дніпро: Університет імені Альфреда Нобеля, 2017. – 84 с.

ISBN 978-966-434-387-6

Збірник містить достатню кількість завдань з усіх традиційних розділів дисциплін «Вища математика» та «Вища та прикладна математика», які є ключовими дисциплінами при економіко-математичній підготовці бакалаврів.

Призначений для студентів, викладачів і читачів, які самостійно підвищують рівень своєї математичної грамотності.

УДК 510.2

© О.Г. Холод, Г.Г. Швачич, І.М. Козирєва, Л.І. Ярмоленко, 2017

© Університет імені Альфреда Нобеля, оформлення, 2017

ISBN 978-966-434-387-6

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА 3

Тема 1.1. Визначники 3

Тема 1.2. Елементи теорії матриць 5

Тема 1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь 7

Тема 1.4. Використання Жорданових виключень у лінійній алгебрі 11

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ 14

Тема 2.1. Елементи векторної алгебри 14

Тема 2.2. Пряма на площині 19

Тема 2.3. Лінії другого порядку 23

Тема 2.4. Елементи аналітичної геометрії в просторі 27

РОЗДІЛ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ 28

Тема 3.1. Границя числової послідовності 28

Тема 3.2. Границя функції в точці 30

Тема 3.3. Неперервність функції в точці 32

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ 34

Тема 4.1. Похідна функції 35

Тема 4.2. Застосування похідної 37

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ 43

Тема 5.1. Основні поняття 43

Тема 5.2. Диференційованість функції двох незалежних змінних 43

Тема 5.3. Дослідження функції двох незалежних змінних 46

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ 48

Тема 6.1. Невизначений інтеграл 49

Тема 6.2. Визначений інтеграл 58

Тема 6.3. Невласний інтеграл 61

РОЗДІЛ 7. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 62

Тема 7.1. Диференціальні рівняння першого порядку 62

Тема 7.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку 68

Тема 7.3. Системи диференціальних рівнянь 71

РОЗДІЛ 8. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ 72

Тема 8.1. Числові ряди. Дослідження та збіжність 72

Тема 8.2. Степеневі ряди 79

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1.1. Визначники

1. Обчислити визначник:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 30 \end{vmatrix}$

1.2. $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 6 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}$

1.3. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

1.4. $\begin{vmatrix} \sqrt{11}-3 & 2 \\ 2 & \sqrt{11}+3 \end{vmatrix}$

1.5. $\begin{vmatrix} (a+b) & (a-b) \\ (a-b) & (a+b) \end{vmatrix}$

1.6. $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ (a^2+a) & (ab+ac) \end{vmatrix}$

1.7. $\begin{vmatrix} (x-1) & 1 \\ x^3 & (x^2+x+1) \end{vmatrix}$

1.8. $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \\ \frac{-4t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

1.9. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

1.10. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg}\alpha \end{vmatrix}$

1.11. $\begin{vmatrix} x^3 & x+1 \\ x^2-x+1 & 1 \end{vmatrix}$

1.12. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 \\ x^2-2x+4 & 4 \end{vmatrix}$

2. Розв'язати рівняння:

2.1. $\begin{vmatrix} (x-1) & 24 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2.2. $\begin{vmatrix} x & -5 \\ -1 & (x-4) \end{vmatrix} = 0$

2.3. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & (x-5) \end{vmatrix} = 7$

3. Обчислити визначник за допомогою теореми Лапласа:

3.1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **3.2.** $\begin{vmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

3.3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ **3.4.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

3.5. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -13 & 7 \end{vmatrix}$ **3.6.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

3.7. $\begin{vmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ **3.8.** $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3.9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ **3.10.** $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3.11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

4. Обчислити визначник:

4.1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ **4.2.** $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

4.3. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

4.4. $\begin{vmatrix} 3 & 10 & -5 & -8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

4.5. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -18 & -64 \end{vmatrix}$

4.6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

4.7. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

4.8. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 7 \\ 10 & -8 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

4.9. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 4 & 4 \\ -5 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

4.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Тема 1.2. Елементи теорії матриць

5. Знайти добуток матриць C = AB, якщо останній існує:

5.1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

5.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

5.3. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B = [1 \quad 2 \quad 3]$

5.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.5. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5.6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

5.7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

5.8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

5.9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5.10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

5.11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

5.12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

6. Знайти матрицю C:

6.1. $C = 2A - 3B$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

6.2. $C = AB + B$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

6.3. $C = A^2 + BD$ $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $D = [\ 1 \quad -5\ ]$

6.4. $C = AB - 4B$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

6.5. $C = A^2 - BD$ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $D = [\ 2 \quad 4\ ]$

Тема 1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

7. Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

7.1. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$ **7.2.** $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 13 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ **7.4.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

8. Розв'язати систему рівнянь матричним методом, зробити перевірку:

8.1. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 18 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$

9. Методом Гаусса знайти розв'язок системи рівнянь:

9.1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -9 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -7 \end{cases}$

10. Розв'язати систему рівнянь, провести дослідження (якщо це необхідно), зробити перевірку:

10.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

10.5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$

10.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

10.7. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$

10.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 11 \end{cases}$

10.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -5x_1 + 12x_2 + 7x_4 = -5 \end{cases}$

10.10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$

10.11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 - 11x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

10.12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

10.13. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

10.14. $\begin{cases} -7x_1 - 8x_2 - 7x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

10.15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 11 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$

10.16. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

10.17. $\begin{cases} 4x_1 + 10x_3 - 2x_4 = 10 \\ 3x_1 + 4x_4 = 35 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

10.18. $\begin{cases} 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 18 \\ -3x_1 + x_2 - 24x_3 + 7x_4 = 9 \\ 2x_1 + 14x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$

10.19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + 7x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 17x_3 - 7x_4 = 26 \end{cases}$

10.20. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 18x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

Тема 1.4. Використання Жорданових виключень у лінійній алгебрі

11. Знайти матрицю, обернену до даної, якщо вона існує:

11.1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

11.2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11.4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11.5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

11.6. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

11.7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11.8. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

12. Визначити ранг матриці:

12.1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

12.2. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

12.3. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

12.4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

12.5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

12.6. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **12.7.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

12.8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & -10 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 20 & -20 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & -35 & 30 & 5 \end{bmatrix}$

13. Розв'язати матричне рівняння:

13.1. $AX = B$; якщо $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

13.2. $XA = B$; якщо $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

13.3. $AXB = C$; якщо

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

14. Розв'язати систему рівнянь, провести дослідження (якщо це необхідно):

14.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ **14.2.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$

14.3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

14.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

14.5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$

14.6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$

14.7. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$

14.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 11 \end{cases}$

14.9.
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -5x_1 + 12x_2 - 17x_3 + 7x_4 = -5 \end{cases}$

14.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$

14.11.
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 - 11x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$

14.12. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 18x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

14.13. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

14.14. $\begin{cases} -7x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

14.15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 11 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$

14.16. $\begin{cases} 4x_1 + 10x_3 - 2x_4 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 35 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

14.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 2.1. Елементи векторної алгебри

15.1. Задайте на площині три довільних вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$. Побудуйте вектори:

$$-3\bar{a};\ 1/2\bar{a} - 3\bar{b};\ \bar{a} - 1/2\bar{b};\ \bar{a} + 2\bar{b} - 1/3\bar{c};\ 2\bar{a} + 3\bar{b};\ -1/2\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}.$$

15.2. Маємо три одиничних вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ та $\bar{c}$, які складають з віссю X кути $\pi/3$, $2\pi/3$ та π відповідно. Знайти проекцію на вісь X вектора:

$$\bar{d} = 3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}.$$

15.3. Знайти $\text{пр}_x(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$, якщо $|\bar{a}| = 5$; $|\bar{b}| = 6$; $|\bar{c}| = 8$; $|\bar{d}| = 12$. Кути, що їх складають вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ та $\bar{d}$ з віссю X, дорівнюють 0; $2\pi/3$; π та $\pi/3$ відповідно.

15.4. Знайти довжину та напрямок вектора $\bar{AB}$, якщо A(2; 1; –4), B(1; 3; 5).

15.5. Знайти довжини сторін та медіан трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин: A(0; 0; 0), B(1; 2; –1), C(2; 3; 5).

15.6. Маємо вектори $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ та $\bar{b} = (0; 1; 1)$. Визначити довжину та напрямок вектора $\bar{c} = \bar{a} + 2\bar{b}$.

15.7. Чи може довільний вектор складати з координатними осями x, y та z кути 45^o, 60^o та 120^o відповідно?

15.8. Чи коленіарні вектори $\bar{a} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k}$ та $\bar{b} = (1; -3; 2)$?

15.9. З трьох векторів обрати два коленіарні:

$$\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k},\quad \bar{b} = 5\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k},\quad \bar{c} = 6\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}.$$

15.10. Відомо, що $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 3$, кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ дорівнює $\pi/3$. Обчислити: $\bar{a}\cdot\bar{b}$; $(\bar{a} + \bar{b})^2$; $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$; $(2\bar{a} + \bar{b})\cdot\bar{b}$; $|\bar{a} - \bar{b}|$; $\text{пр}_{\bar{a}}\,(\bar{a} + 2\bar{b})$; $|3\bar{a} + 2\bar{b}|$.

15.11. Маємо вектори:

$$\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k} \ , \ \bar{b} = \bar{i} - \bar{j}.$$

Обчислити: $\bar{a}\cdot\bar{b}$; $(\bar{a} + \bar{b})^2$кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$; $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a} + 2\bar{b})$.

15.12. Знайти кут між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$.

15.13. Маємо точки A(0; –1; 2); B(1; 3; –1); C(1; -1; 1); D(2; 1; –2). Чи перпендикулярні вектори $\bar{AD}$ та $\bar{BC}$?

15.14. Вектор складає з віссю *Ox* кут $\alpha = 120^\circ$, з віссю *Oy* кут $\beta = 45^\circ$. Який гострий кут γ він складає з віссю *Oz*?

15.15. Відомі дві проекції вектора $\bar{a}$: $a_x = -1$; $a_y = 2$. Знайти проекцію a_z, якщо $|\bar{a}| = 3$.

15.16. Знайти початок (точку A) вектора $\bar{a} = -4\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, якщо його кінець збігається з точкою B(–2; 3; –1).

15.17. Визначити точку B, з якою збігається кінець вектора $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, якщо його початок збігається з точкою A(1; 2; –3).

15.18. Маємо точки A(1; 2; 1); B(2; –1; 3) та C(3; α; β). При яких значеннях α та β точка C належить прямій AB?

15.19. Зайти $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$, якщо $\bar{a} = 5\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

15.20. При якому значенні l вектори $\bar{a} = l\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$ та $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - l\bar{k}$ будуть взаємно перпендикулярними?

15.21. В паралелограмі ABCD $\bar{AB} = \bar{a}$, $\bar{AD} = \bar{b}$. Виразити через вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ вектори: $\bar{PA}$; $\bar{PB}$; $\bar{PC}$; PD, де P – точка перетину діагоналей паралелограма.

15.22. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ мають рівні довжини і відкладені від спільного початку. Довести, що вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, якщо відкласти його від того ж початку, буде спрямований по бісектрисі кута між векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$.

15.23. Трикутник ABC задано координатами вершин A(1; 2; 3), B(3; 2; 1), C(1; 4; 1). Довести, що цей трикутник – рівнобічний.

15.24. Вектор $\bar{a}$ складає з осями координат *X*; *Y* та *Z* кути α, β та γ відповідно. Визначити кут γ, якщо відомо, що $\alpha = \pi/4$; $\beta = \pi/3$, а проекція вектора $\bar{a}$ на вісь *z* додатна.

15.25. Вектор $\bar{a}$ складає з осями координат гострі кути (α; β; $\gamma < \pi/2$). Знайти кут γ, якщо відомо; що $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$.

15.26. Довести, що скалярний добуток двох векторів не змінюється, якщо до одного з них додати вектор, перпендикулярний до іншого співмножника.

15.27. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 3\bar{m} - 4\bar{n}$, якщо $\bar{m}$ та $\bar{n}$ – взаємно перпендикулярні одиничні вектори.

15.28. При яких значеннях α та β вектори $\bar{a} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} + \bar{k}$ та $\bar{b} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + \beta\bar{k}$ будуть коленіарними?

15.29. Знайти внутрішній кут при вершині A в трикутнику ABC, якщо відомі координати його вершин: A(2; –1; 3), B(1; 1; 1), C(0; 0; 5).

15.30. При якому значенні числа α вектори $\bar{a} = (\alpha; -1; 2)$ та $\bar{b} = (2; 3; \alpha)$ будуть взаємно перпендикулярними?

15.31. Обчислити добуток $(5\bar{a} + 3\bar{b})(2\bar{a} - \bar{b})$, якщо $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ і $\bar{a} \perp \bar{b}$.

15.32. Обчислити: $(2\bar{i} - \bar{j})\,\bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k})\,\bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$, $3\bar{i}(\bar{j} + 2\bar{k}) + 3\bar{k}(2\bar{i} - \bar{k})$; $(\bar{i} - \bar{k})^2 + (\bar{k} - \bar{i})^2 + (\bar{i} - \bar{j})^2$, де задіяні вектори – орти ДПСК.

15.33. Визначити, чи є вектори $\bar{a} = (1; 0; -2)$ та $\bar{b} = (2; -1; 0)$ лінійно залежними.

15.34. Знайти одиничний вектор того ж напрямку, що й вектор $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

15.35. Знайти довжину вектора $\bar{c} = (2\bar{a} - \bar{b})$, якщо:

$$\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}, \qquad \bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}.$$

15.36. Маємо вершини чотирикутника:

$$A(-4;\ 1;\ 1),\ \ B(-5;\ -5;\ 3),\ \ C(2;\ -3;\ 1),\ \ D(1;\ 4;\ 0).$$

Знайти кути між його діагоналями.

15.37. Розкласти вектор $\bar{a} = (9;\ 4)$ за базисом, який утворено векторами:

$$\bar{p} = (2;\ -3) \text{ і } \bar{q} = (1;\ 2).$$

15.38. Розкласти вектор $\bar{a} = (2;\ -4;\ 15)$ за базисом:

$$\bar{e}_1 = (2;\ 0;\ 0),\ \ \bar{e}_2 = (0;\ 1;\ 0),\ \ \bar{e}_3 = (0;\ 0;\ 5).$$

15.39. Знайти розклад вектора $\bar{a}$ у базисі $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$:

1) $\bar{a} = (12;\ 1)$, $\bar{e}_1 = (1;\ 2)$, $\bar{e}_2 = (7;\ -9)$;

2) $\bar{a} = (2;\ -21)$, $\bar{e}_1 = (2;\ 1)$, $\bar{e}_2 = (-1;\ 5)$;

3) $\bar{a} = (-4;\ 1)$, $\bar{e}_1 = (5;\ 4)$, $\bar{e}_2 = (-2;\ -3)$;

4) $\bar{a} = (9;\ 7)$, $\bar{e}_1 = (2;\ 5)$, $\bar{e}_2 = (-3;\ 8)$;

5) $\bar{a} = (7;\ 40)$, $\bar{e}_1 = (2;\ -5)$, $\bar{e}_2 = (3;\ 4)$.

15.40. Довести, що для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ справедлива нерівність: $|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$. У якому випадку ліва частина дорівнює правій?

15.41. Яку умову повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, щоб виконувалася рівність: $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$?

15.42. У трикутнику OAB точка M – середина сторони AB (AM = MB). Виразити вектори $\bar{MA}$ та $\bar{MB}$ через $\bar{OA}$ і $\bar{OB}$.

15.43. Довести, що трикутник ABC – гострокутний, якщо відомі координати його вершин: A(3; –2; 5), B(–2; 1; –2), C(5; 1; –1).

15.44. Довести, що трикутник ABC – прямокутний; якщо відомі координати його вершин: A(2; –1; 3), B(1; 1; 1), C(0; 0; 5).

15.45. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок A(1; –3; 7) і B(5; 4; –5).

15.46. На осі абсцис знайти точку, рівновіддалену від точок A(2; –4; 5) і B(–3; 2; 7).

15.47. Маємо вектори $\bar{a} = (x; 1; 8)$ та $\bar{b} = (3; 0; 9)$. Знайти невідому координату x вектора $\bar{a}$, якщо $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

15.48. Маємо координати трьох послідовних вершин паралелограма: A(1; –2; 3), B(3; 2; 1), C(6; 4; 4). Знайти координати четвертої вершини D.

15.49. Довести, що точки A(3; –1; 2), B(1; 2; –1), C(–1; 1; –3) та D(3; –5; 3) є вершинами трапеції.

15.50. Вектор $\bar{a}$ коленіарний до вектора $\bar{b} = (2; -1; 1)$. Визначити координати вектора $\bar{a}$, якщо відомо, що $\bar{a}\,\bar{b} = 18$.

15.51. Відомі координати вершин трикутника ABC:

$$A(2a; 0),\quad B(a; -a),\quad C(0; 0).$$

Визначити кут між стороною BC та медіаною CM трикутника.

15.52. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} \quad \text{та} \quad \bar{b} = -2\bar{i} + \bar{k}.$$

15.53. Визначити довжини діагоналей паралелограма, який побудовано на векторах $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$ та $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$. Кут між одиничними векторами $\bar{m}$ та $\bar{n}$ дорівнює $\pi/3$.

15.54. Довести, що скалярний добуток двох векторів не змінюється, якщо до одного з них додати вектор, перпендикулярний до іншого співмножника.

15.55. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 3\bar{m} - 4\bar{n}$, якщо $\bar{m}$ та $\bar{n}$ – взаємно перпендикулярні одиничні вектори.

15.56. Знайти розклад вектора $\bar{a}$ у базисі $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$:

1) $\bar{a} = (2; 4; 9)$, $\bar{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\bar{e}_2 = (2; -1; -2)$, $\bar{e}_3 = (-3; -1; 2)$;

2) $\bar{a} = (17; -2; 16)$, $\bar{e}_1 = (2; 5; 4)$, $\bar{e}_2 = (-3;1; 3)$, $\bar{e}_3 = (1; -3; 2)$;

3) $\bar{a} = (7; -3; 7)$, $\bar{e}_1 = (5; 1; 2)$, $\bar{e}_2 = (-1; 1; -3)$, $\bar{e}_3 = (8; 6; -1)$;

4) $\bar{a} = (4; 11; 11)$, $\bar{e}_1 = (2; 3; 3)$, $\bar{e}_2 = (-1; 4; -2)$, $\bar{e}_3 = (-1; -2; 4)$;

5) $\bar{a} = (-4; 1; 3)$, $\bar{e}_1 = (3; 1; 2)$, $\bar{e}_2 = (4; -2; 1)$, $\bar{e}_3 = (-1; 2; 5)$.

Тема 2.2. Пряма на площині

16.1. У декартовій прямокутній системі координат (x, y) побудувати точки, абсциси яких дорівнюють –2, –1, 0, 1, 3, 4, а ординати визначаються з рівняння:

1) $y = 2x$; 2) $y = 3x - 5$; 3) $y = x^2 + 1$.

16.2. Побудувати точку, симетричну точці M(3; 2) відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат.

16.3. Відстань між точками A(–2; 5) і M(x; y) дорівнює трьом одиницям довжини (AM = 3). Визначити координати точки M, якщо:

1) точки A і M належать прямій, паралельній осі абсцис;

2) точки A і M належать прямій, паралельній осі ординат.

16.4. Визначити довжини сторін трикутника, якщо відомі координати його вершин:

A(3; 2), B(–1; –1), C(11; – 6).

16.5. Визначити ординату точки M, якщо її абсциса дорівнює 7, а відстань до точки N(–1; 5) складає 10 одиниць довжини.

16.6. На осі ординат знайти точку, відстань якої від точки A(4; 6) становить 5 одиниць довжини.

16.7. Обчислити довжини медіан трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин:

$$A(3; -2),\quad B(5; 2),\quad C(-1; 4).$$

16.8. Визначити кутовий коефіцієнт і початкову ординату прямої, заданої рівнянням:

1) $2x - y + 3 = 0$; 2) $5x + 2y = 8$; 3) $3x + 8y + 16 = 0$;

4) $y = 2x$; 5) $y = 8$; 6) $2y + 5 = 0$.

16.9. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат та складає з додатним напрямком осі x кут:

1) 45°; 2)135°; 3) 30°;

4) 180°; 5) 210°; 6) 150°.

16.10. Скласти рівняння прямої, що відсікає на осях координат x та y відрізки $a = 2/5$ і $b = -1/10$ відповідно.

16.11. В одній системі координат побудувати прямі, задані рівняннями:

1) $y = 3x + 1$, $y = x + 2$, $y = 8$, $3x + 5 = 0$;

2) $x + 2y = 4$, $y + 3 = 0$, $2x - y = 0$, $x = -8$;

3) $2x + 1 = y$, $x + 4y = 0$, $y = -4{,}5$, $x = 0$.

16.12. Чи можливо рівняння прямої $20x + 21y = 0$ записати у відрізках? Якщо ні, то чому?

16.13. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку M(–3; –4) паралельно координатним осям.

16.14. У трикутнику ABC (див. умову задачі 16.7) визначити рівняння сторін та внутрішні кути у радіанах.

16.15. Серед прямих, заданих рівняннями:

$$4x - 6y + 7 = 0,\quad 20x - 30y - 11 = 0,\quad 3x - 5y + 7 = 0,$$

$$x - 11y + 8 = 0,\quad 10x + 6y - 3 = 0,$$

аналітичним чином визначити паралельні та перпендикулярні.

16.16. Довести, що прямі, задані рівняннями:

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ і } 2x + 5y - 12 = 0,$$

перетинаються та знайти аналітично координати точки перетину.

16.17. Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат

1) паралельно прямій $y = 4x - 3$;

2) перпендикулярно прямій $2y = x + 2$;

3) та створює кут 45° із прямою $y = 2x + 5$.

16.18. Які з наведених рівнянь прямих представлені у нормальному вигляді:

1) $3x - 2y + 7 = 0$, 4) $x + (1/2)y - 3 = 0$,

2) $(2/3)x - (4/7)y - 1 = 0$, 5) $(-12/13)x + (5/13)y + 3 = 0$,

3) $(3/5)x - (4/5)y - 2 = 0$, 6) $x - 5 = 0$.

16.19. Привести до нормального вигляду рівняння прямих:

1) $x + 5y - 4 = 0$, 2) $2x + 5\sqrt{3}\,y - 7 = 0$, 3) $5x + 2y + 13 = 0$,

4) $3x - 4y - 15 = 0$, 5) $x - 4y = 0$, 6) $9x - 12y = -2$.

16.20. Визначити кутовий коефіцієнт прямої $y = kx + 5$, якщо відомо, що ця пряма віддалена від початку координат на відстань $d = \sqrt{5}$ одиниць довжини.

16.21. Методами аналітичної геометрії довести, що трикутник з вершинами в точках A(0; 0), B (3; 1) і C(1; 7) – прямокутний.

16.22. Знаючи координати вершин трикутника P(–2; 1), Q (4; 8) та R(10; 6), перевірити, чи є серед його внутрішніх кутів тупі.

16.23. Яку умову повинні задовольняти координати точки M(x; y), якщо вона однаково віддалена від точок A(7; –3) та B(–2; 1)?

16.24. Визначити площу трикутника, що утворений прямою $4x + 3y - 36 = 0$ з осями координат.

16.25. Знайти довжину висоти трапеції, якщо відомі рівняння основ трапеції:

$$3x - 2y + 7 = 0 \text{ і } 6x - 4y - 9 = 0.$$

16.27. Записати рівняння прямої, яка відсікає на осях координат рівні додатні відрізки та утворює з осями координат трикутник площею 8 кв. од.

16.28. Знайти координати центра ваги трикутника PQR (вихідні дані див. в задачі 16.22).

16.29. Діагоналі ромба, які дорівнюють 10 та 4 одиницям довжини, прийняті за осі координат. Визначити рівняння сторін ромба.

16.30. Відомі координати вершини трикутника:

$$A(3; 2),\quad B(-1; -1),\quad C(11; -6).$$

Визначити:

1) довжини сторін трикутника;

2) рівняння сторін;

3) внутрішні кути в радіанах;

4) рівняння медіан;

5) довжини медіан;

6) рівняння висот;

7) довжини висот;

8) точку перетину висоти, опущеної з вершини A, та медіани, проведеної з вершини B; кут між ними;

9) координати центра ваги трикутника.

16.31. На осі ординат знайти точку, однаково віддалену від початку координат та від прямої, заданої рівнянням $3x - 4y + 12 = 0$.

16.32. Дано рівняння однієї зі сторін ромба $x - 3y + 10 = 0$ та однієї з його діагоналей $x + 4y - 4 = 0$. Відомо, що діагоналі ромба перетинаються в точці P(0; 1). Записати рівняння сторін ромба, знайти його периметр.

16.33. Відомі координати трьох вершин трапеції ABCD ($AD \parallel BC$):

$$A(-3; -2),\ B(4; -1),\ C(1; 3).$$

Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати четвертої вершини D.

16.34. Відомі рівняння двох сторін паралелограма: $x - y = 1$ та $x = 2y$. Знайти рівняння інших сторін, якщо відомо, що діагоналі паралелограма перетинаються в точці M(3; –1).

16.35. Відомі координати двох протилежних вершин квадрата ABCD:

$$A(1; 2) \quad і \quad C(3; 6).$$

Визначити координати двох інших вершин. Зробити рисунок.

16.36. Знаючи вершини трикутника A(3; –2), B(1; 5) і C(–4; 3), довести, що висоти його перетинаються в одній точці. Обчислити площу трикутника, вершини якого є основами висот даного трикутника ABC. Зробити рисунок.

16.37. Відомі координати середин сторін трикутника ABC:

$$A_1(-1; -1), \ B_1(1; 9), \ C_1(9; 1).$$

Скласти рівняння серединних перпендикулярів. Зробити рисунок.

16.38. Відомі координати двох вершин трикутника ABC:

$$A(-4; 3) \ і \ B(4; -1),$$

а також точки перетину його висот M(3; 3). Визначити координати вершини C.

Тема 2.3. Лінії другого порядку

17.1. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0.$$

17.2. Написати рівняння кола з центром у точці C(–4; 3) та радіусом R = 5. Чи належать йому точки A (–1; –1), B(3; 2), D(0; 0)?

17.3. Знайти рівняння кола з центром у точці C(0; 4), якщо відомо, що коло проходить через точку A(5; –8).

17.4. Привести до канонічного вигляду рівняння кривих другого порядку та побудувати їх:

1) $x^2 + 2x + y^2 = 0$,
2) $4x^2 + 25y^2 = 100$,
3) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$,
4) $x^2 - 4y + 2x = 0$,
5) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$,
6) $y^2 - x^2 = 4$,
7) $9x^2 - 25y^2 = 225$,
8) $y^2 - 8y = 2x$.

17.5. Визначити рівняння кола, що проходить через початок координат та має центр у точці C(6; 0).

17.6. Знайти рівняння кола, що торкається осей координат x та y та проходить через точку A(1; 2).

17.7. Дослідити взаємне розташування кола $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$ та прямих:

1) $x - y = 4$, 2) $3x - 4y + 36 = 0$, 3) $y = x - 5$.

17.8. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

1) його півосі дорівнюють 4 і 2;

2) відстань між фокусами дорівнює 6, а більша піввісь дорівнює 5;

3) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь дорівнює 3;

4) мала піввісь дорівнює 3, а ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}/2$;

5) більша піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет дорівнює 0,5;

6) сума півосей дорівнює 8 і дорівнює відстані між фокусами;

7) відстані від одного з фокусів еліпса до кінців більшої осі дорівнюють 7 та 1.

17.9. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

1) відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10;

2) дійсна піввісь дорівнює 5, а вершини поділяють відстань між центром і фокусами навпіл;

3) дійсна піввісь дорівнює $2\sqrt{5}$ а, ексцентриситет дорівнює $\sqrt{1{,}2}$;

4) відстані від однієї з вершин гіперболи до фокусів дорівнюють 9 та 1.

17.10. Скласти канонічне рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо відомо, що:

1) парабола симетрична до осі абсцис та відстань від фокуса до вершини дорівнює 3;

2) парабола симетрична до осі абсцис та проходить через точку P(1; –3);

3) парабола симетрична до осі ординат та проходить через точку Q(2; –4).

17.11. Серед даних рівнянь знайти рівняння кола:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$; 3) $x^2 + 10y + 18 = 0$.

17.12. Написати рівняння кола, для якої відрізок AB є одним із його діаметрів: A(–3; 0), B(3; 6).

17.13. Написати рівняння кола, що проходить через такі точки:

$$A(-1; 3),\ B(0; 2)\ \text{і}\ C(1; -1).$$

17.14. Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ з бісектрисами I і II координатних кутів

17.15. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. Знайти точки його перетину з віссю ординат та кут між радіусами, проведеними в точки перетину.

17.16. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

1) еліпс проходить через точку M(1; 1) та має ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;

2) еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3}; -2)$ і $N(-2\sqrt{3}; 1)$;

3) еліпс проходить через точку $M(-4; -\sqrt{21})$ та має ексцентриситет $\varepsilon = 3/4$;

4) еліпс проходить через точки $M(2; \sqrt{3})$ і N(0, 2).

17.17. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

1) довжина дійсної осі дорівнює 6 і гіпербола проходить через точку M(9; –4);

2) ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$ і гіпербола проходить через точку $P(\sqrt{3}; \sqrt{2})$;

3) гіпербола проходить через точки $M(-5; 2)$ і $N(2\sqrt{5}; \sqrt{2})$;

4) гіпербола проходить через точку P(9; 8), і її асимптоти мають рівняння:

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} x;$$

5) довжина уявної осі дорівнює 4 і гіпербола проходить через точку $P(6; -2\sqrt{2})$.

17.18. Привести до канонічного вигляду рівняння параболи та побудувати її:

1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;

2) $y^2 + 6x + 14y + 49 = 0$;

3) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;

4) $x^2 - 4x + 2y = 0$.

17.19. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$.

Знайти точки перетину кола з віссю ординат та кут між радіусами, проведеними в ці точки.

17.20. Точка C(3; –1) є центром кола, що відсікає на прямій $2x - 5y + 18 = 0$ хорду довжиною 6 одиниць. Записати рівняння кола.

17.21. Знайти точки перетину еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ та кола, що проходить через фокуси цього еліпса та має центр у його «верхній» вершині.

17.22. Визначити рівняння траєкторії точки M, що при своєму русі залишається вдвічі ближче до точки P(–1; 0), ніж до прямої, заданої рівнянням $x + 4 = 0$.

17.23. Маємо гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Написати рівняння співфокусного еліпса, що проходить через точку M(4; 6).

17.24. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 2 та фокуси збігаються з фокусами еліпса, який задано рівнянням: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

17.25. Знайти ексцентриситет гіперболи, в якій кут між асимптотами дорівнює 60°.

17.26. Знайти відстань від правого фокуса гіперболи до її асимптот.

17.27. Знайти точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - 3y^2 = 12$ з колом, що проходить через початок координат та має центр у правому фокусі даної гіперболи.

17.28. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника, якщо відомі координати вершин трикутника:

A(7; 7), B(0; 8), C(–2; 4).

17.29. Написати рівняння кола, що стикається з віссю абсцис у точці A(5; 0) і відтинає на осі ординат хорду довжиною 10 одиниць.

17.30. На осі абсцис знайти центр кола, що проходить через точки A(2; 3) і B(5; 2), визначити його радіус і записати рівняння.

Тема 2.4. Елементи аналітичної геометрії в просторі

18.1. Скласти рівняння площини, що проходить:

1) через точку P (3; –1; 2) паралельно координатній площині YOZ;

2) через точку M(2; –2; 2) перпендикулярно координатній площині XOZ;

3) через точку P(2; –1; 1) перпендикулярно вектору $\bar{n} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$;

4) через початок координат і точки P(4; –2; 1) і Q(2; 4; –3);

5) через три точки A(0; 3; 0), B(1; 1; 1) і C(2; –2; 1);

6) через точку M(–2; 3; 4) та відсікає на осях координат рівні відрізки;

7) через точку N(–2; 1; 4) та відсікає на осі z відрізок удвічі більший, ніж на осях x і y.

18.2. Знайти відстань від точки M(1; 3; –2) до площини, що задана рівнянням:

1) $x + y - z - 2 = 0$,

2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$,

3) $5x - 3y + 4 = 0$.

18.3. Скласти канонічне рівняння прямої у просторі, що проходить через:

1) точку M(5; 3; 4) паралельно вектору $\bar{e} = 2\bar{i} + 5\bar{j} - 8\bar{k}$;

2) дві точки A(–1; 2; 3) та B(2; –3; 1);

3) точку M(3; –1; 2) перпендикулярно площині, яка задана рівнянням: $2x + 3y + z = 6$;

4) точку A(1; –5; 3) та утворює з осями координат x, y і z кути 60°, 45° та 120° відповідно.

18.4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку P(3; –1; –5) та перпендикулярна площинам, заданим рівняннями:

$$3x - 2y + 2z + 7 = 0 \quad \text{та} \quad 5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

18.5. Знайти кут між площинами, заданими рівняннями:

1) $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ і $x = 0$;

2) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ і $x - y - z + 9 = 0$;

3) $3x - y + 2z + 15 = 0$ і $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;

4) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ і $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

18.6. Визначити кут у радіанах між прямою $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ та площиною $x + 2y - 4z + 1 = 0$. Знайти координати точки їх перетину.

18.7. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x + y - 3z + 1 = 0$ з прямими:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

РОЗДІЛ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 3.1. Границя числової послідовності

19. Обчислити границю числової послідовності:

19.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{2n-3}$

19.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8}{n^2} - \frac{2^n}{5}\right)$

19.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{10^n}\right)$

19.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

19.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+7}{3-4n}$

19.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100n}{1+n^2}$

19.7. $\lim\limits_{n\to\infty} 7^{\frac{3n}{6n-5}}$

19.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$

19.9. $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{\frac{n-1}{n^2+2}}$

19.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1}$

19.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n^2-1}$

19.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$

19.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}$

19.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 5n^2 - 9n + 11}{n^4 + n^3 - 5n^2 + n + 2}$

19.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+5n^2+2n+7}{4n^2+9n+11}$

19.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-13n+7}{3n^2+4n+12}$

19.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2$

19.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-3}-\dfrac{n^2}{n+3}\right)$

19.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+3}-\dfrac{2n^2}{2n+1}\right)$

19.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n-4}-\dfrac{n^4}{n+1}\right)$

19.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$

19.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

19.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$

19.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}$

19.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{8^{n+1}}\right)$

19.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$

19.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

19.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{n^2}$

19.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n+2}\right)^{n-1}$

19.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-1}-2n^2}{\sqrt{n^4+1}-3}$

19.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)^2-(3n+2)^2}{(3n-2)^2+(3n-2)^2}$

19.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{n+1}+3^{n+1}}{8^n+3^n}$

19.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}+\ldots+\dfrac{1}{7^n}\right)$

19.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+5^2+\ldots+5^n\right)$

19.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{1}{4^n}}{2^n}$

19.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{n-1}$

19.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}{3+9+\ldots+3^n}$

19.38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{1}{5^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$

19.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{3n^2}$

Тема 3.2. Границя функції в точці

20. Обчислити границю функції в точці:

20.1. $\lim\limits_{x\to -1,5} \arcsin\dfrac{x+3}{3}$

20.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+3}{x^3-x}$

20.3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{x^2-4x}$

20.4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+10x-3}{2x^3-5x^2+1}$

20.5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-4x^2+5}{2x^4-7-x}$

20.6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^6-4x^2-2}{x^4-72+x}$

20.7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

20.8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

20.9. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

20.10. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x+\mathrm{a}}-\sqrt{x})$

20.11. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

20.12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

20.13. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

20.14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$

20.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$

20.16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3+3x-x^2-3}$

20.17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

20.18. $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

20.19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$

20.20. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

20.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{x^4+x^2}$

20.22. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

20.23. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$

20.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

20.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

20.26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$

20.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

20.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$

20.29. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

20.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2-x}$

20.31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5}}{x-2}$

20.32. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-7}$

20.33. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

20.34. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

20.35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x^2+x}$

20.36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

20.37. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}}{a}$

20.38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

20.39. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

20.40. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

20.41. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

20.42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

20.43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

20.44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg} 5x}$

20.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}$

20.46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 3x}$

20.47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$

20.48. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

20.49. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{3\cos x}{2x-\pi}$

20.50. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$

20.51. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$

20.52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

20.53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{2x\operatorname{tg} 2x}$

20.54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 4x}{x\sin^2 4x}$

20.55. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$

20.56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{1-\cos 8x}$

20.57. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x \operatorname{tg} 2x}$

20.58. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$

20.59. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{8x}$

20.60. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

20.61. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$

20.62. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

20.63. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

20.64. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

20.65. $\lim\limits_{x\to 0} (1+8\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

20.66. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

20.67. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$

20.68. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

20.69. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

20.70. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$

20.71. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

20.72. $\lim\limits_{x\to 3} (10-3x)^{\frac{2}{3-x}}$

20.73. $\lim\limits_{x\to 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$

20.74. $\lim\limits_{x\to 4} (4x-15)^{\frac{2x}{x^2-16}}$

Тема 3.3. Неперервність функції в точці

21. Дослідити функцію на неперервність. Установити тип точок розриву:

21.1. $f(x) = \ln(2x-3)$

21.2. $f(x) = \dfrac{5}{(3+x^2)^3}$

21.3. $f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}}$

21.4. $f(x) = \dfrac{3x}{(2x+4)^2}$

21.5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

21.6. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + x^3}$

21.7. $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$

21.8. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$

21.9 $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$

21.10 $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-2}$

21.11. $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

21.12. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$

21.13. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

21.14. $f(x) = 3\ln(x^2-9)$

21.15. $f(x) = \dfrac{2}{e^x - 1}$

21.16. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2-1}$

21.17. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5x+6}$

21.18. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x - 1}$

21.19. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < -\pi/4 \\ \operatorname{tg} x, & \text{if } -\pi/4 \le x < \pi/4 \\ 1, & \text{if } x \ge \pi/4 \end{cases}$

21.20. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x < -2 \\ |x|, & \text{if } -2 \le x \le 2 \\ 2, & \text{if } x > 2 \end{cases}$

21.21. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{if } 0 \le x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$

21.22. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < -2 \\ |x|, & \text{if } -2 \le x < 3 \\ x^2, & \text{if } x \ge 3 \end{cases}$

21.23. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } x < 2 \\ x+1, & \text{if } 2 \le x \le 4 \\ 5, & \text{if } x > 4 \end{cases}$

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1. $(\mathrm{C})' = 0$; C – Const

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$;

$(x)' = 1$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

4. $\left(e^x\right)' = e^x$

5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\mathrm{Sin}\, x)' = \mathrm{Cos}\, x$

8. $(\mathrm{Cos}\, x)' = -\mathrm{Sin}\, x$

9. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x}$

10. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(u\, v)' = u'\, v + v'\, u$

3. $(\mathrm{C}\, u(x))' = \mathrm{C}\, u'(x)$, if C – const

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - v'\, u}{v^2}$

5. $[\mathrm{f}(\varphi(x))]' = \mathrm{f}_{\varphi}'\, \varphi_x'$

6. $[u(x)^{v(x)}]' = v\, u^{v(x)-1}\, u' + u^{v(x)}\, v' \ln u$

Тема 4.1. Похідна функції

22. Знайти похідну функції:

22.1. $y = \frac{2}{27x} - \frac{9}{2x^2}$

22.2. $y = \cos 2x - 2\sin x$

22.3. $y = 3^{\operatorname{arctg} x}$

22.4. $y = (\sin 3x)^2$

22.5. $y = e^{-x} \sin x$

22.6. $y = \frac{x^3}{x - 1}$

22.7. $y = \sqrt[5]{\sin x}$

22.8. $y = \cos\left(\frac{1}{x^2} + 8\right)$

22.9. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}}$

22.10. $y = x\sqrt[3]{\frac{2}{1 + x}}$

22.11. $y = 2^{(1 - x)/(1 + x)}$

22.12. $y = x\, e^{-x^2}$

22.13. $y = \operatorname{tg}^3(8x - x^2 + 1)$

22.14. $y = \arccos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

22.15. $y = \ln(x^2 + 1) - 2x$

22.16. $y = \operatorname{tg}\sqrt{x} + \operatorname{ctg}\sqrt{x}$

22.17. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$

22.18. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$

22.19. $y = \frac{x}{e^x}$

22.20. $y = 5\sqrt[5]{4x + 3}$

22.21. $y = 2x^3 + \operatorname{ctg} x^3$

22.22. $y = \sqrt[3]{(x - 3)^4} + \frac{3}{2x^3 - 3x}$

22.23. $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

22.24. $y = \sin^3(5x)\cos^5(3x)$

22.25. $y = \operatorname{tg}^3(6x) - e^{-1/x}$

22.26. $y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$

22.27. $y = e^{-1/\cos x}$

22.28. $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x - 2)^5}$

22.29. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

22.30. $y = \dfrac{2}{(x-1)^3} - \dfrac{8}{6x^2+3x-7}$

22.31. $y = e^{\sin^2 x}\cos(2x+1)$

22.32. $y = 2^x e^{-x^2}$

22.33. $y = \dfrac{\arccos(-x)}{x}$

22.34. $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

22.35. $y = 5^{\operatorname{arctg}^2 x}$

22.36. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$

22.37. $y = \ln^3(2x + \sin x)$

22.38. $y = \cos^4(\ln^2 x)$

22.39. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+x+1}}$

22.40. $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{2x}$

22.41. $y = 2^{\sin^2(2x+4)}$

22.42. $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/3}$

22.43. $y = (e^{\sin x} - 1)^2$

22.44. $y = \ln(\cos^2 x)$

22.45. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$

22.46. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$

22.47 $y = \log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}\right)$

22.48. $y = 2^{\ln^2(8x + 5\ln x)}$

22.49. $y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$

22.50. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2(2x+8)}$

22.51. $y = 3^{\cos^2 x}$

22.52. $y = x^2\, \mathrm{e}^{-2x}$

22.53. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$

22.54. $y = \ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

22.55. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$

22.56. $y = \mathrm{e}^{x/\sqrt{3}}\operatorname{arctg}^2 x$

22.57. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$

22.58. $y = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$

22.59. $y = \arcsin(\operatorname{tg} 6x)$

22.60. $y = x\sqrt[3]{x^2 + \dfrac{2}{x}}$

22.61. $y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x)\, e^{-x}$ **22.62.** $y = \sin^2\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)$

22.63. $y = \sqrt{1 + \cos^3 x}$ **22.64.** $y = (\operatorname{ctg}(7x + 4))^{\sqrt{x+3}}$

22.65. $y = (\operatorname{tg} 2x)^x$ **22.66.** $y = (x^2 + 15)^{\sin x}$

22.67. $y = (\sin x)^{\cos x}$ **22.68.** $y = [\cos(3x + 1)]^{3x}$

22.69. $y = (\ln x)^{2x}$ **22.70.** $y = x^{1/x}$

22.71. $y = (\sin x)^{2 \operatorname{tg} x}$ **22.72.** $y = 2x^{\sqrt{x}}$

22.73. $y = (\arcsin x)^{\ln x}$ **22.74.** $y = \sqrt[x]{x}$

22.75. $y = x^{2/\ln x}$ **22.76.** $y = (x + x^2)^x$

22.77. $2x^2 + y^2 + 3xy = y$ **22.78.** $\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1$

22.79. $\cos(x^2 y) = \frac{2y}{x}$ **22.80.** $xy + \ln y + 2\ln x = 0$

22.81. $y = e^{x+y}$ **22.82.** $y = \sin\frac{y}{x}$

22.83. $\ln(x^2y^2 + 1) = e^{x^2 + y^2} + y$ **22.84.** $ye^x = 1 + x\, e^y$

22.85. $y \sin x = \cos(x - y)$ **22.86.** $x + y + e^y = 2$

22.87. $\operatorname{arctg} y + 2 = xy$ **22.88.** $x^2y - y^2 + (x - y)^3 = 0$

22.89. $(y^2 - x^2)^3 - x^2y - y = x$ **22.90.** $e^{x+y} = xy$

Тема 4.2. Застосування похідної

23. Знайти границю функції в точці за допомогою правила Лопіталя:

23.1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x}$ **23.2.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$

23.3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ **23.4.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln 5x}{\ln 2x}$

23.5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$

23.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

23.7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$

23.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$

23.9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2a}}\dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$

23.10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

23.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

23.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$

23.13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

23.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$

23.15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$

23.16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{\ln x}\right)$

23.17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{4x}}{x+e^{4x}}$

23.18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$

23.19. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$

23.20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

23.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

23.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

23.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$

23.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\sin \pi x}$

23.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

23.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

23.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

23.28. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

23.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{x}$

23.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

23.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ **23.32.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$

23.33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-x}{\sin x-x^2}$ **23.34.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

23.35. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$ **23.36.** $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

23.37. $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$ **23.38.** $\lim\limits_{x\to 0} (1-e^{2x})\operatorname{ctg} x$

23.39. $\lim\limits_{x\to +0} \ln x \sin x$ **23.40.** $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$

23.41. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (x-\dfrac{\pi}{2})\operatorname{tg} x$ **23.42.** $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^{-2x}$

23.43. $\lim\limits_{x\to +0} x^3 \ln x$ **23.44.** $\lim\limits_{x\to +0} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

23.45. $\lim\limits_{x\to \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ **23.46.** $\lim\limits_{x\to +0} (\ln(1+x))^{\frac{1}{x}}$

23.47. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ **23.48.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

23.49. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ **23.50.** $\lim\limits_{x\to \infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

23.51. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ **23.52.** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$

23.53. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{\ln x}$ **23.54.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1-x}$

23.55. $\lim\limits_{x\to \infty} (3^x+x)^{1/x^2}$ **23.56.** $\lim\limits_{x\to 2} (\operatorname{tg}(x-2))^{(3^x-9)}$

23.57. $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln x)^x$ **23.58.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$

23.59. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ **23.60.** $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+e)^{\frac{1}{x}}$

24. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

24.1. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **24.2.** $y = \dfrac{3x}{2-x}$ **24.3.** $y = \dfrac{2}{x^2-9}$

24.4. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$ **24.5.** $y = x\,e^{-x^2}$ **24.6.** $y = \dfrac{2x+3}{x^2}$

24.7. $y = \dfrac{3}{x\,(x+2)}$ **24.8.** $y = \ln\,(x^2-4)$ **24.9.** $y = \dfrac{2x+1}{x-4}$

24.10. $y = x^2\,e^{-3x}$ **24.11.** $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ **24.12.** $y = \ln\dfrac{x+3}{x} - 3$

24.13. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$ **24.14.** $y = (x-1)\,e^{3x}$ **24.15.** $y = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

24.16. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ **24.17.** $y = x + \sqrt{1-x}$ **24.18.** $y = 2 + \dfrac{12}{x^2-4}$

24.19. $y = \dfrac{x^3-8}{2x^2}$ **24.20.** $y = \ln\,(x^2+1)$ **24.21.** $y = x^2\,(2-x)^2$

24.22. $y = x + \dfrac{27}{x^3}$ **24.23.** $y = x\sqrt{1-x}$ **24.24.** $y = \ln\,(x^2-4x)$

24.25. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ **24.26.** $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ **24.27.** $y = 2x\ln x$

24.28. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$ **24.29.** $y = x\,e^{-2x}$ **24.30.** $y = \dfrac{2}{x^2-9}$

24.31. $y = x^2\ln x$ **24.32.** $y = \dfrac{x^3-8}{2x^2}$ **24.33.** $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

24.34. $y = \ln\,(x^2+4x)$ **24.35.** $y = \dfrac{7x}{x^2-4}$ **24.36.** $y = e^{1/(3-x)}$

24.37. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ **24.38.** $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ **24.39.** $y = \dfrac{2}{(x - 1)\,x}$

24.40. $y = x^2\, e^{-3x}$ **24.41.** $y = \dfrac{4x^2 + x + 4}{x - 1}$ **24.42.** $y = \dfrac{e^{2x}}{x}$

24.43. $y = \dfrac{x^3 + 8}{2x^2}$ **24.44.** $y = x\, e^{2x - 1}$ **24.45.** $y = \dfrac{2x - 8}{3x^2}$

24.46. $y = \ln (2 + x^2)$ **24.47.** $y = \dfrac{x^3}{4 + x^3}$ **24.48.** $y = e^{1/(3x - 1)}$

24.49. $y = \dfrac{3x^3}{x^2 + 1}$ **24.50.** $y = \dfrac{1}{e^{2x} - 1}$ **24.51.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

24.52. $y = \ln (x^2 - 2x)$ **24.53.** $y = \dfrac{2x^2}{2x^2 - 1}$ **24.54.** $y = \dfrac{e^x}{x - 4}$

24.55. $y = \dfrac{3x - 4}{x^2}$ **24.56.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$ **24.57.** $y = \dfrac{3 \ln x}{\sqrt{x + 1}}$

24.58. $y = (0{,}1x^2 - 5)\, x^2$ **24.59.** $y = x^3\, e^{-x}$ **24.60.** $y = e^{2x - x^2}$

24.61. $y = \dfrac{2}{x^2 - 3}$ **24.62.** $y = x + \dfrac{1}{x}$ **24.63.** $y = \dfrac{2 - x^2}{x - 1}$

24.64. $y = \dfrac{8 - x^3}{2x}$ **24.65.** $y = (x - 1)\, e^{3x + 1}$ **24.66.** $y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1}$

24.67. $y = \dfrac{1}{e^{2x} - 1}$ **24.68.** $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ **24.69.** $y = \dfrac{2 - x^2}{1 - 4x^2}$

24.70. $y = \ln (x^2 + 4x)$ **24.71.** $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}$ **24.72.** $y = \ln \left(\dfrac{x + 6}{x} \right) - 1$

24.73. $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **24.74.** $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ **24.75.** $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 4}$

24.76. $y = \dfrac{8}{x^2 - 2x + 3}$ **24.77.** $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$ **24.78.** $y = -2x^3\, e^{-x}$

24.79. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 8}$ **24.80.** $y = x - \ln(x + 1)$ **24.81.** $y = \dfrac{2 + x^2}{2x}$

24.82. $y = 2x^3\, e^{-(x-1)}$ **24.83.** $y = \dfrac{4}{x^2 + x + 4}$ **24.84.** $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

24.85. $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 1}$ **24.86.** $y = \dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$ **24.87.** $y = \dfrac{x^3 + 32}{x^2}$

24.88. $y = (2 - x)\, e^{x-3}$ **24.89.** $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$ **24.90.** $y = x^2 - 2\ln x$

24.91. $y = -\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$ **24.92.** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **24.93.** $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$

24.94. $y = \ln\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$ **24.95.** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ **24.96.** $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

24.97. $y = \sqrt{(x+3)\, x^2}$ **24.98.** $y = 2x^2 + \ln x$ **24.99.** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

24.100. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$

РОЗДІЛ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Тема 5.1. Основні поняття

25. Знайти та побудувати область визначення функції $Z = f(x, y)$:

25.1. $Z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ **25.2.** $Z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

25.3. $Z = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ **25.4.** $Z = \arcsin(x + y)$

25.5. $Z = 3\ln(x^2 + y)$ **25.6.** $Z = \dfrac{1}{x - y} + \dfrac{1}{y}$

25.7. $Z = \dfrac{1}{\ln(x + y)}$ **25.8.** $Z = \dfrac{8}{x^2 + y^2}$

25.9. $Z = \dfrac{8}{x^2 - y^2}$ **25.10.** $Z = \sqrt{x + y} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Тема 5.2. Диференційованість функції двох незалежних змінних

26. Знайти частинні похідні першого порядку функцій:

26.1. $Z = 3x^2 + \dfrac{4}{y}$ **26.2.** $Z = e^{x^2 + 4y}$

26.3. $Z = \dfrac{x}{2y}$ **26.4.** $Z = e^{-x}\sin(2y + 1)$

26.5. $Z = \dfrac{3x}{y^2 + 4}$ **26.6.** $Z = \sqrt[3]{x^2 + 4y}$

26.7. $Z = \ln\dfrac{1}{x\,y^2}$ **26.8.** $Z = \sin^2 y + \dfrac{x}{y}$

26.9. $Z = 2^{x^2 - \sqrt{y}}$ **26.10.** $Z = x^{\sin y}$

27. Знайти похідну $\dfrac{dz}{dx}$ складної функції:

27.1. $Z = \dfrac{1}{\sqrt{x\,y}},\quad y = \sin^2\dfrac{x}{2}$ **27.2.** $Z = \sqrt{\dfrac{x}{y}},\quad y = e^{x^2 - 3}$

27.3. $Z = 4^{\sin(x-y)}, \quad y = \sqrt[3]{1-x^2}$ **27.4.** $Z = \arccos\left(\frac{x}{y}\right), \quad y = 3^{\sqrt{x}}$

27.5. $Z = 6^{x^2-\sqrt{y}}, \quad y = \sin(1-2x)$ **27.6.** $Z = \ln\frac{x}{\sqrt{y}}, \quad y = \arccos\sqrt{x}$

27.7. $Z = \frac{x}{y^2-4}, \quad y = \operatorname{arctg}(2x)$ **27.8.** $Z = \operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{y}}, \quad y = 3^{x^2-4x+2}$

27.9. $Z = \sin^2(xy+3), \quad y = 2^{\cos(3x)}$ **27.10.** $Z = (1-xy)^2, \quad y = \frac{1}{x+2}$

28. Знайти частинні похідні першого порядку функції двох змінних *Z = f (x, y)*, що задана неявно:

28.1. $x^2 + 3y^2z^5 = e^{y/z}$

28.2. $y^2 - x\operatorname{tg}(xz+1) = 0$

28.3. $z^2 + \frac{x}{y} + e^{xy} = 2z$

28.4. $z^3 + y^3 - 3xyz = 0$

28.5. $x\cos y + y\cos x + z\cos(x+y) = 0$

28.6. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$

28.7. $(x^2+y^2)^3 - 3(y^2+z^2)^2 + 1 = 0$

28.8. $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$

28.9. $xy + \ln y + 2\ln(y+z) = 0$

28.10. $\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{z^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$

29. Знайти повний диференціал функції:

29.1. $Z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ **29.2.** $Z = x\ln(x+y)$

29.3. $Z = \sqrt{x^2+y^2+1}$ **29.4.** $Z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

29.5. $Z = \dfrac{x - \sqrt{y}}{x + \sqrt{y}}$

29.6. $Z = \left(x - \sqrt{xy} + \dfrac{1}{y}\right)^2$

29.7. $Z = (\sin x)^{(y^2 + 1)}$

29.8. $Z = \sin^3\left(\dfrac{1}{2x\,y^2}\right)$

29.9. $Z = 2^{\frac{x}{y} - 3xy}$

29.10. $Z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

30. Наближено обчислити:

30.1. $(2{,}02)^2\,(4{,}08)^3$

30.2. $\sqrt{2{,}04^2 + 4{,}97}$

30.3. $\sqrt{(4{,}01)^2 + (2{,}95)^2}$

30.4. $2\sqrt[3]{28 \cdot 125{,}05}$

30.5. $(1{,}05)^{2{,}05}$

30.6. $\sin 63^{\circ}$

30.7. $\sin 58^{\circ} \cos 63^{\circ}$

30.8. $\sin 1{,}58\ \mathrm{tg}\ 3{,}06$

30.9. $(1{,}97)^{\cos 88^{\circ}}$

30.10. $2{,}03^3\ e^{0{,}14}$

31. Довести, що функція *Z = f (x, y)* задовольняє задане рівняння:

31.1. $Z = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

31.2. $Z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ $\qquad x^2\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - y^2\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

31.3. $Z = e^{(xy)}$ $\qquad x^2\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - y^2\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

31.4. $Z = e^{(x/y)}$ $\qquad \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} + y\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = 0$

31.5. $Z = \sin(x + 4y)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 16\,\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$

31.6. $Z = xy + y^2 - x$ $\qquad \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2$

31.7. $Z = \cos(y - 3x)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 9\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

31.8. $Z = \dfrac{x}{y}$ $\qquad x\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0$

Тема 5.3. Дослідження функції двох незалежних змінних

32. Дослідити функцію $Z = f(x, y)$ на екстремум:

32.1. $Z = x^2 - 4x - 2y^2 + 4$

32.2. $Z = (x - 1)^2 + 2y^2$

32.3. $Z = 2xy - 2x + 4y$

32.4. $Z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

32.5. $Z = x^3 y^2 (6 - x - y)$

32.6. $Z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

32.7. $Z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \quad (x \neq 0; y \neq 0)$

32.8. $Z = \sin x + \sin y + \cos(x + y), \quad \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}\right)$

33. Знайти $\overline{\text{grad}\, Z}$ та похідну за напрямком вектора $\dfrac{\partial Z}{\partial \overline{n}}$ в точці $M(x_0; y_0)$:

33.1. $Z = x^3 + 3x^2y + y^2$, $\quad M(1; -1)$, $\quad \overline{n} = (3; 4)$;

33.2. $Z = \ln(5x^2 + y^2)$, $\quad M(1; 1)$, $\quad \overline{n} = (3; 2)$;

33.3. $Z = \text{arctg}(xy^2)$, $\quad M(2; 3)$, $\quad \overline{n} = \overline{AB}$, $A(4; 0)$, $B(3; 1)$;

33.4. $Z = 3x^4 - 2x^3 y^2$, $\quad M(-1; 0)$, $\quad \overline{n} = (1; 4)$;

33.5. $Z = x^2y - 4y^2x$, M(2; 2), $\overline{n} = (3; -5)$;

33.6. $Z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$, M(1; 2), $\overline{n} = (5; -12)$;

33.7. $Z = x^2 + \frac{4}{x} + y^2$, M(2; 3), $\overline{n} = (0; -7)$;

33.8. $Z = \sqrt[3]{x + 4y}$, M(7; 5), $\overline{n} = (1; 1)$.

34. Функції кількох незалежних змінних

34.1. Знайти похідну функції $U(x, y, z)$ в точці M(3; 1; 1) за напрямком вектора $\overline{n}$ якщо відомо, що цей вектор утворює з осями координат x та y кути $\alpha = \pi/3$ та $\beta = \pi/4$ відповідно, а з віссю z – гострий кут γ.

34.2. Встановити характер зміни (зростання, спадання) функції $U = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точці M(0; 0) за напрямком від цієї точки до точки $M_1(3; 4)$.

34.3. Знайти похідну функції $U = xy^2 + z^2 - xyz$ за напрямком вектора $\overline{n}$, що утворює з осями координат x; y та z кути 60°; 45° та 60° відповідно.

34.4. Знайти швидкість зміни функції $U = xyz$ за напрямком прямої, що проходить через точки M(5; 1; – 8) та B(9; 4; 4).

34.5. Встановити характер зміни функції $U = 5\,x^2yz - 7xy^2 + 5xyz^2$ за напрямком вектора $\overline{n} = 8\,\overline{i} - 4\,\overline{j} - 8\,\overline{k}$ в точці M(1; 1; 1).

34.6. Знайти величину та напрямок градієнта функції $U = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точці M(1; –1; 2). З'ясувати, в яких точках градієнт перпендикулярний осі x.

34.7. Знайти кут між градієнтами функцій $U = x^2 + y^2 - z^2$ та $V = \arcsin\frac{x}{x + y}$ в точці $M(1; 1; \sqrt{7})$.

34.8. Знайти значення параметра α, при якому градієнти функцій $Z(x; y) = \alpha x^2 + 4yx$ та $V = xy^2 + 2\alpha y$ в точці M(2; 1) будуть взаємно перпендикулярними.

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ \alpha \neq -1$

3. $\int \mathrm{Cos}\, x\, dx = \mathrm{Sin}\, x + C$

4. $\int \mathrm{Sin}\, x\, dx = -\mathrm{Cos}\, x + C$

5. $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$

6. $\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$

8. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

15. $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$

Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(\boldsymbol{a}x + b)\,dx = \frac{1}{\boldsymbol{a}} F(ax+b) + C$

Формула інтегрування частинами: $\int u\,dv = uv - \int v du$

Тема 6.1. Невизначений інтеграл

35. Знайти інтеграл, використовуючи властивості невизначеного інтеграла і таблицю інтегралів:

35.1. $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2}\right)dx$

35.2. $\int (5\cos x - 3e^x)\,dx$

35.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$

35.4. $\int \left[\frac{2}{9+x^2} - \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{6}{x}\right]dx$

35.5. $\int \left(3 + x + \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

35.6. $\int \left(x + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}\right)dx$

35.7. $\int \frac{(x+2)(x^2-5)}{x^3}\,dx$

35.8. $\int \left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

35.9. $\int \frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}dx$

35.10. $\int x^3(6x - 7)\,dx$

35.11. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x^2}\,dx$

35.12. $\int 3^x\,5^x\,dx$

35.13. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 5^x\right)dx$

35.14. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2}\,dx$

35.15. $\int \left(2^x - \frac{3}{16+x^2}\right)dx$

35.16. $\int (\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)\,dx$

35.17. $\int \left(\frac{15}{1+x^2} - \frac{13}{\cos^2 x}\right)dx$

35.18. $\int \frac{(1 - \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$

35.19. $\int \frac{2\cdot 3^x - 3\cdot 2^x}{2^x}\,dx$

35.20. $\int \frac{x^3 - 2x^4 e^x}{x^4}\,dx$

35.21. $\int \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

35.22. $\int \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

35.23. $\int \frac{(1+x)^3}{x\sqrt{x}}\,dx$

35.24. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x^2e^x-x}{x^2}\,dx$

35.25. $\int \frac{4+\sqrt{3+x^2}}{3+x^2}\,dx$

35.26. $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}\,dx$

35.27. $\int \frac{x^2-7x+12}{x-4}\,dx$

35.28. $\int \frac{x^2}{x^2+5}\,dx$

35.29. $\int \frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$

35.30. $\int (\cos x + 2e^x - 3x^2)\,dx$

35.31. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

35.32. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx$

35.33. $\int 7\,\mathrm{tg}^2\, x\,dx$

35.34. $\int \frac{3-2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

35.35. $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}\,dx$

35.36. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

36. Знайти невизначений інтеграл, використовуючи підстановку:

36.1. $\int (2x+1)^{10}\,dx$

36.2. $\int \frac{dx}{x-5}$

36.3. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

36.4. $\int \sqrt{x-1}\,dx$

36.5. $\int \frac{dx}{x+8}$

36.6. $\int e^{-x/2}\,dx$

36.7. $\int \sqrt{4-3x}\,dx$

36.8. $\int \cos(4x+8)\,dx$

36.9. $\int \cos \frac{x}{3}\,dx$

36.10. $\int \sin \frac{x}{2}\,dx$

36.11. $\int \sin 3x\,dx$

36.12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

36.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x}}$

36.14. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-4)}$

36.15. $\int 3^{(4-7x)}\,dx$

36.16. $\int \frac{dx}{(6+13x)^5}$

36.17. $\int \frac{dx}{\cos^2(9-13x)}$

36.18. $\int \frac{dx}{(5+3x)^{17}}$

36.19. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

36.20. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

36.21. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

36.22. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

36.23. $\int 2\sin x\cos x\,dx$

36.24. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}\,dx$

36.25. $\int \frac{x^5}{\sqrt{7-x^6}}\,dx$

36.26. $\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx$

36.27. $\int \frac{x\,dx}{2+3x^2}$

36.28. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

36.29. $\int e^{x^3} x^2\,dx$

36.30. $\int x e^{-x^2}\,dx$

36.31. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-2}}\,dx$

36.32. $\int \frac{xdx}{5+7x^4}$

36.33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

36.34. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

36.35. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$

36.36. $\int \frac{\ln^2 x+1}{x}\,dx$

36.37. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin x}}\,dx$

36.38. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

36.39. $\int \frac{2^x}{2^x+1}\,dx$

36.40. $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$

36.41. $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}}\,dx$

36.42. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$

36.43. $\int (x^2+1)^3\,x\,dx$

36.44. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

36.45. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

36.46. $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\ln(x^3+1)\,dx$

36.47. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$

36.48. $\int \frac{8^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

36.49. $\int \frac{2^{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x}\,dx$

36.50. $\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx$

36.51. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,dx$

36.52. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$

36.53. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-8}}$

36.54. $\int \frac{\operatorname{ctg} x+1}{\sin^2 x}\,dx$

36.55. $\int x^3\sqrt{2x^4-3}\,dx$

36.56. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

36.57. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

36.58. $\int \cos(x^2+5)\,x\,dx$

36.59. $\int x^3\cos(4-2x^4)\,dx$

36.60. $\int \frac{5^{1/x}}{2x^2}\,dx$

37. Методом інтегрування частинами знайти інтеграл:

37.1. $\int x\,e^x\,dx$

37.2. $\int x\sin 2x\,dx$

37.3. $\int (2-x)\,2^x\,dx$

37.4. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

37.5. $\int (x-3)\cos 3x\,dx$

37.6. $\int (x-3)\arcsin x\,dx$

37.7. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$

37.8. $\int (3x-4)\cos 3x\,dx$

37.9. $\int \arcsin x\,dx$

37.10. $\int \frac{x\,dx}{e^x}$

37.11. $\int x\sin^2 x\,dx$

37.12. $\int \arccos\frac{x}{3}\,dx$

37.13. $\int \operatorname{arcctg} 2x\,dx$

37.14. $\int x\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

37.15. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$

37.16. $\int x\,3^x\,dx$

37.17. $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$

37.18. $\int (x^2-2x+5)\,10^{-x}\,dx$

37.19. $\int x\operatorname{ctg}^2 x\,dx$

37.20. $\int x\arccos x\,dx$

37.21. $\int (x^2-3x+4)\,5^x\,dx$

37.22. $\int \ln(x+3)\,dx$

37.23. $\int x\ln x\,dx$

37.24. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 2x}$

37.25. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

37.26. $\int x^3\ln(x+1)\,dx$

37.27. $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,dx$

37.28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

37.29. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

37.30. $\int x^2\ln\frac{x}{3}\,dx$

37.31. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x/3)}$

37.32. $\int (x^2-4x)\sin\frac{x}{2}\,dx$

37.33. $\int x^2 e^{3x}\,dx$ **37.34.** $\int x^2 \sin x\,dx$

37.35. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$ **37.36.** $\int (x+1)^2 \cos x\,dx$

37.37. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$ **37.38.** $\int \cos(\ln x)\,dx$

37.39. $\int \sin(\ln x)\,dx$ **37.40.** $\int e^x \cos x\,dx$

37.41. $\int e^x \cos(2x)dx$ **37.42.** $\int e^{-x/2} \sin(3x)dx$

38. Знайти інтеграл від раціонального дробу:

38.1. $\int \frac{dx}{3x-7}$ **38.2.** $\int \frac{2dx}{3-x}$

38.3. $\int \frac{dx}{1+5x}$ **38.4.** $\int \frac{dx}{x^3-8x^2+12x}$

38.5. $\int \frac{5dx}{(4-5x)^{10}}$ **38.6.** $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$

38.7. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+16}\,dx$ **38.8.** $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x+9}$

38.9. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$ **38.10.** $\int \frac{x-3}{x^2+5x+6}\,dx$

38.11. $\int \frac{2x+1}{x^3-4x}\,dx$ **38.12.** $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

38.13. $\int \frac{4dx}{x(x-1)(x+2)}$ **38.14.** $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$

38.15. $\int \frac{6x^2-x-14}{(x^2-4)\,(x-1)}\,dx$ **38.16.** $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$

38.17. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$ **38.18.** $\int \frac{dx}{4x^3-x^2}$

38.19. $\int \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)^2(x-3)}\,dx$

38.20. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$

38.21. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$

38.22. $\int \frac{6x^2(x-1)}{x\,(x^2-1)}\,dx$

38.23. $\int \frac{dx}{(x+4)^3}$

38.24. $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2\,(x^2+1)}\,dx$

38.25. $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1}\,dx$

38.26. $\int \frac{x+3}{x^3 - 27}\,dx$

38.27. $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + 2x}\,dx$

38.28. $\int \frac{x+3}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$

38.29. $\int \frac{dx}{x^3 + 27}$

38.30. $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8}\,dx$

38.31. $\int \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

38.32. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 81}$

38.33. $\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^3 - 9x}\,dx$

38.34. $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^3 - x + 1}\,dx$

38.35. $\int \frac{2x^4 - x^3 + 5}{x^3 - 9x}\,dx$

38.36. $\int \frac{3x - 7}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}\,dx$

38.37. $\int \frac{3x^3 - x^2 - 4x + 13}{x^2(x^2 - 4x + 13)}\,dx$

38.38. $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

38.39. $\int \frac{x-3}{4x^2 + 4x + 3}\,dx$

38.40. $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1}{x^4 + 3x^3 + 2x^2}\,dx$

38.41. $\int \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 2)}\,dx$

38.42. $\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx$

39. Знайти інтеграл від тригонометричних функцій:

39.1. $\int \frac{dx}{5 - \sin^2 x + 2\cos^2 x}$

39.2. $\int \cos^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$

39.3. $\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$

39.4. $\int \sin(8x)\cos(3x)\, dx$

39.5. $\int \sin(3x)\sin(2x)dx$

39.6. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

39.7. $\int \cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}\, dx$

39.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

39.9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin x}}\, dx$

39.10. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

39.11. $\int \sin^5\frac{x}{3}\, dx$

39.12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \mathrm{tg}^2 x}$

39.13. $\int \sin^6 x \cos^5 x\, dx$

39.14. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

39.15. $\int \sin^2(3x)\, dx$

39.16. $\int \mathrm{tg}^3(2x)\, dx$

39.17. $\int \mathrm{ctg}^6 x\, dx$

39.18. $\int \frac{dx}{\sin x}$

39.19. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

39.20. $\int \frac{dx}{\cos x}$

39.21. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$

39.22. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

39.23. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

39.24. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\, dx$

40. Знайти інтеграл від ірраціональних функцій:

40.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

40.2. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$

40.3. $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x^5}}\, dx$

40.4. $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{\sqrt[3]{3x+4}}\, dx$

40.5. $\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

40.6. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$

40.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

40.8. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

40.9. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

40.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+5x-2x^2}}$

40.11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

40.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$

40.13. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}}\,dx$

40.14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}}\,dx$

40.15. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

40.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$

40.17. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

40.18. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}$

40.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+5}}$

40.20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$

40.21. $\int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$

40.22. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

40.23. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+29}}$

40.24. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\,dx$

41. Знайти невизначений інтеграл:

41.1. $\int \frac{dx}{x(1-\ln x)^2}$

41.2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$

41.3. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

41.4. $\int \ln(x^2+1)\,dx$

41.5. $\int (x+1)^3 e^{(x+1)^2}\,dx$ **41.6.** $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$

41.7. $\int (x+3^x)\cos(3x)\,dx$ **41.8.** $\int \frac{x^5-x^2-x+1}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$

41.9. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **41.10.** $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

41.11. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ **41.12.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$

41.13. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$ **41.14.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{10+x^2}}$

41.15. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\,dx$ **41.16.** $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$

41.17. $\int e^{\arcsin x}\,dx$ **41.18.** $\int \ln^2 x\,dx$

41.19. $\int x\ln(x-1)\,dx$ **41.20.** $\int \frac{2\sin x\,dx}{\cos^2 x+\cos x+1}$

41.21. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

Тема 6.2. Визначений інтеграл

42. Обчислити визначений інтеграл:

42.1. $\int_0^4 (2x+4)\,dx$ **42.2.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

42.3. $\int_1^2 (x^2-4x+e^{2x})\,dx$ **42.4.** $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx$

42.5. $\int_0^2 \ln(3x+1)\,dx$ **42.6.** $\int_{-1}^0 (2x+3)\,e^{-x}\,dx$

42.7. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$

42.8. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

42.9. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$

42.10. $\int_0^{\pi/2} (2-x)\sin(3x)\,dx$

42.11. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

42.12. $\int_0^2 (2-x)\,e^{-x/2}\,dx$

42.13. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$

42.14. $\int_e^{e^2} \ln x\,dx$

42.15. $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$

42.16. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

42.17. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x}$

42.18. $\int_1^2 \frac{4x+2}{2x-1}\,dx$

42.19. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}\,dx$

42.20. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}$

42.21. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 4x\,dx$

42.22. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

42.23. $\int_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\,dx$

42.24. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+10}$

42.25. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4}$

42.26. $\int_3^8 \frac{1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx$

42.27. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-4}$ **42.28.** $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}$

42.29. $\int\limits_{0}^{6} \frac{x\,dx}{\sqrt{4+2x}}$ **42.30.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$

43. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

43.1. $y=-x^2,\quad x+y+2=0$ **43.2.** $y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1$

43.3. $y=x,\quad y=0,\quad x+y-4=0$ **43.4.** $y=3-2x-x^2,\quad y=0$

43.5. $y=x^2,\quad y=4$ **43.6.** $y^2=x,\quad x=16$

43.7. $y=\sin x,\ \ y=0,\quad 0\le x\le \pi$ **43.8.** $y=\ln x,\ x=e,\ \ y=0$

43.9. $y=x^2,\quad y=2-x^2$ **43.10.** $y=x^2,\ \ x=y^2$

43.11. $x=0,\ \ y=1,\ \ y=3,\ \ xy=1$ **43.12.** $y=\sqrt{4x},\ \ y=\frac{x}{3}$

43.13. $y=\frac{1}{x}>0,\ \ x=1,\ \ x=3,\ \ y=0$ **43.14.** $y=\sqrt{x},\ \ x=4,\ \ y=0$

43.15. $y=\frac{6}{x},\ \ y=5-x$ **43.16.** $y=x,\ \ y=3x,\quad y=2$

43.17. $y^2=9x,\ \ y=3x$ **43.18.** $y=x^2-3x,\ \ y=x$

43.19. $y=x^3,\ \ y=2x,\ \ y=x$ **43.20.** $y=x^3,\ \ y=8,\ \ x=0$

43.21. $y=12+6x-x^2,\ y=x^2-2x+2$

43.22. $y^2=x,\ y^2+2=x,\ y=2,\ y=0$

Тема 6.3. Невласний інтеграл

44. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

44.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

44.2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$

44.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{5+x^2}$

44.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

44.5. $\int\limits_0^{\infty} e^{\sqrt{x}}\,dx$

44.6. $\int\limits_0^{1} x \ln x\,dx$

44.7. $\int\limits_0^{4/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

44.8. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$

44.9. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

44.10. $\int\limits_{-3}^{2} \frac{x\,dx}{(x+3)^2}$

44.11. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$

44.12. $\int\limits_0^{\infty} x\,e^{-x^2}dx$

44.13. $\int\limits_0^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$

44.14. $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}$

44.15. $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

44.16. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$

44.17. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$

44.18. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

44.19. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2\,dx}{\sin(x^3)}\,dx$

44.20. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+5)^4}$

44.21. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\,(x+1)}$

44.22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$

44.23. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$

44.24. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

44.25. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+3}$

44.26. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+8}$

44.27. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2}$

44.28. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$

44.29. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{3x^2+3x+11}$

44.30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+1}$

РОЗДІЛ 7. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 7.1. Диференціальні рівняння першого порядку

45. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлювальними змінними:

45.1. $(1+e^x)\,y' = y\,e^x$

45.2. $e^{x+y}\,dx + y\,dy = 0$

45.3. $\sqrt{5+y^2}\,dx + (x^2y + y)\,dy = 0$

45.4. $\sqrt[3]{1+x^6-2x^3}\,dy = x^2y^2\,dx$

45.5. $\operatorname{tg}x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$

45.6. $y \ln y + xy' = 0$

45.7. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

45.8. $y - xy' = 8(1 + x^2 y')$

45.9. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\, y' = 0$

45.10. $xy' - y = y^2$

45.11. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

45.12. $2y'\sqrt{x} = y$

45.13. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$

45.14. $x^2 (2yy' - 1) = 1$

45.15. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$

46. Знайти загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння:

46.1. $(5\sqrt{xy} - y)\, dx + x\, dy = 0$

46.2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

46.3. $xy' \cos\frac{y}{x} = y \cos\frac{y}{x} - x$

46.4. $xy' = y + x \sin\frac{y}{x}$

46.5. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

46.6. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

46.7. $y' = \frac{y^2}{x^2 + xy}$

46.8. $xy' - y = x \operatorname{tg}\frac{y}{x}$

46.9. $xy^2\, dy = (x^3 + y^3)\, dx$

46.10. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

46.11. $xy' = y \ln \frac{x}{y}$ **46.12.** $xy' = y\,(1 + \ln \frac{y}{x})$

46.13. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$ **46.14.** $y^2 + x^2\,y' = xyy'$

46.15. $(2x + 3y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0$

47. Знайти загальний інтеграл лінійного диференціального рівняння:

47.1. $y' + 2y = 4x$ **47.2.** $y' - y = 2x - 3$

47.3. $y' + 2xy = x\,e^{-x^2}$ **47.4.** $y' - \frac{y}{x} = x$

47.5. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}\,y = 1$ **47.6.** $y' - 7y = 8\,e^{3x}$

47.7. $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$ **47.8.** $y' + \frac{2y}{x} = x^3$

47.9. $x^2y' + 3 - 2xy = 0$ **47.10.** $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x$

47.11. $y' = e^{2x} + 2y$ **47.12.** $y' + 2xy = 2x^2\,e^{-x^2}$

47.13. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ **47.14.** $dy = (x^2 + 2x - 2y)\,dx$

48. Знайти загальний інтеграл рівняння Бернуллі:

48.1. $y'x + y = -\,xy^2$ **48.2.** $y' = xy + x^3y^2$

48.3. $y' - xy = -\,y^3\,e^{-x^2}$ **48.4.** $y' + 2xy = 2\,e^{2x^2}\,y^3$

48.5. $y' + y = xy^3$ **48.6.** $yy' - \frac{y^2}{x} = -x^3$

48.7. $xy' = 3y - x^4y^2$ **48.8.** $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

48.9. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{x^2 + 1}$ **48.10.** $y' - \frac{y}{x} = -\,xy^2$

48.11. $xy' + y = xy^2 \ln x$

48.12. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$

48.13. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$

48.14. $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0$

48.15. $2y' \sin x + y \cos x = y^3$

49. Знайти загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах:

49.1. $(x^2 + y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0$

49.2. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$

49.3. $(y - 3x^2)\,dx - (4y - x)\,dy = 0$

49.4. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$

49.5. $(y^3 - x)\,y' = y$

49.6. $y\,x^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$

49.7. $2(3xy^2 + 2x^3)\,dx + 3(2x^2y + y^2)\,dy = 0$

49.8. $(\ln y - 2x)\,dx + (\frac{x}{y} - 2y)\,dy = 0$

49.9. $\frac{x\,dx + (2x + y)\,dy}{(x+y)^2} = 0$

49.10. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0$

49.11. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2y\,dy}{x^3}$

49.12. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

50. Розв'язати диференціальне рівняння. При наявності початкової умови знайти частинний розв'язок:

50.1. $x(y^2 - 4)\,dx + y\,dy = 0$

50.2. $yy' - 4x - y^2 = 0$

50.3. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

50.4. $2y' + y = y^3(x - 1)$

50.5. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy = 0$

50.6. $(x + 1)^3\,dy - (y - 2)^2\,dx = 0$

50.7. $(xy' - y)\sin\frac{y}{x} = x$

50.8. $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy$

50.9. $y'\sin x - y\cos x = 1$

50.10. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$

50.11. $(2y - 3)\,dx + (2x + 3y^2)\,dy = 0$

50.12. $(3x^2 + 2y)\,dx + (2x - 3)\,dy = 0$

50.13. $\left(\frac{y^2 + \sin 2x}{y} + 1\right)dx - \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - x\right)dy = 0$

50.14. $y\,dx + (x + y^2x^2)\,dy = 0$

50.15. $y'\operatorname{tg} x = y$

50.16. $2^{x+y} + 3^{x-2y}\,y' = 0$

50.17. $\sec^2 x \sec y\,dx = -\operatorname{ctg} x \sin y\,dy$

50.18. $(x^2 - y^2)\,y' = 2xy$

50.19. $x^2y' + y^2 - 2xy = 0$

50.20. $y' - 3x^2y = x^5 + x^2; \qquad y(0) = 1$

50.21. $(xy\,e^{x/y} + y^2)\,dx = x^2 e^{x/y}\,dy$

50.22. $y' = (x^5 + x^2)\,y^{2/3} + 9x^2 y; \quad y(0) = 0$

50.23. $xy' = y\cos(\ln\dfrac{y}{x})$

50.24. $xy' + y - y^2 \ln x = 0; \quad y(1) = 1$

50.25. $y' + \dfrac{4}{x}y + x = 0$

50.26. $y^2 + x^2 y' = 0; \quad y(-1) = 1$

50.27. $e^{x^2}(y' + 2xy) = 2x$

50.28. $t\,(1 + t^2)\,dx = (x + xt^2 - t^2)\,dt; \quad x(1) = -\dfrac{\pi}{4}$

50.29. $xy' - y = e^x x^2$

50.30. $y' = y\cos^2 x \ln y; \quad y(\pi) = 1$

50.31. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$

50.32. $(x^2 - 2xy)\,dy - (y^2 - 2xy)\,dx = 0; \quad y(1) = 1$

50.33. $(2xy + 3)\,dy - y^2\,dx = 0$

50.34. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}; \quad y(0) = 9/4$

50.35. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2 y - y^2)\,dy = 0$

50.36. $y' \sin x = y \ln y; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

50.37. $(x^2 y - y)\,dy + (xy^2 + x)\,dx = 0$

50.38. $y\,(1 + e^x)\,dy = e^x\,dx; \quad y(0) = 1$

50.39. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}; \quad y(-1) = 1$

50.40. $y' - \dfrac{y}{x-1} = x(x-1); \quad y(2) = 1$

50.41. $3y^2y' + y^3 = x + 1; \quad y(1) = -1$

50.42. $(2x + y\,e^{xy})\,dx + (1 + xe^{xy})\,dy = 0; \quad y(0) = 1$

50.43. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 0$

50.44. $\dfrac{2yy'}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}; \quad y(1) = 0$

50.45. $(x + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\,(1 - \dfrac{x}{y})\,dy = 0$

50.46. $3y' + y = \dfrac{x+1}{y^2}; \quad y(1) = 1$

50.47. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x; \quad y(0) = \pi$

50.48. $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x; \quad y(0) = 0$

50.49. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$

50.50. $3x^2 e^y\,dx + (x^3 e^y - 1)\,dy = 0; \quad y(0) = 1$

Тема 7.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

51. Розв'язати диференціальне рівняння. При наявності початкових умов знайти частинний розв'язок:

51.1. $y'' - y' - 2y = 0$

51.2. $y'' + 5y' = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 5$

51.3. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

51.4. $y'' - 4y = 0$

51.5. $2y'' - 3y' = 0$

51.6. $4y'' - 25y = 0$

51.7. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = -1$

51.8. $4y'' - 4y' + y = 0$

51.9. $y'' + 2y' + y = 0$

51.10. $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{y}{9} = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 0$

51.11. $y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 2$

51.12. $y'' + 3y' + 2{,}25y = 0$

51.13. $y'' + y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$

51.14. $9y'' + 25y = 0$

51.15. $y'' + 4y = 0$

51.16. $9y'' + 16y = 0; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 0$

51.17. $4y'' + y = 0 \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4$

51.18. $y'' + 0{,}09y = 0$

51.19. $y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$

51.20. $y'' - 4y' + 20y = 0$

51.21. $y'' - 2y' + 2y = 0$

51.22. $y'' + 8y' + 20y = 0; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 1$

51.23. $y'' + 4y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -2$

51.24. $y'' - 6y' + 13y = 0$

51.25. $2y'' + y' - y = 2e^x$

51.26. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 5$

51.27. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

51.28. $y'' - 2y' + 2y = 4x + 1$

51.29. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

51.30. $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$

51.31. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$

51.32. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(3 - 4x)$

51.33. $y'' + y = \cos x$

51.34. $y'' + y = \sin 3x$

51.35. $y'' + 9y = 25 \cos 2x$

51.36. $y'' - 25y = 3x^2 - 1$

51.37. $y'' - 2y' + 5y = \sin 2x; \quad y'(0) = -\frac{15}{17}$

51.38. $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2$

51.39. $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$

51.40. $y'' + y = \sin x; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

51.41. $y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

51.42. $y'' + 4y = e^{-2x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

51.43. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

51.44. $y'' - 2y' + y = 16e^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$

51.45. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$

51.46. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

51.47. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$

51.48. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$

51.49. $5y'' - 6y' + 5y = 13\,\frac{e^{2x} + 1}{2}$

51.50. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$

51.51. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

51.52. $y'' + 4y' + 4 = e^{-2x} \ln x$

51.53. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

51.54. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

51.55. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$

51.56. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$

51.57. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$

51.58. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$

51.59. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

51.60. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$

Тема 7.3. Системи диференціальних рівнянь

52. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь:

52.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

52.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

52.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$

52.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$

52.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$

52.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}$

52.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$ **52.8.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$

52.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$ **52.10.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$

РОЗДІЛ 8. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Тема 8.1. Числові ряди. Дослідження та збіжність

53. Записати формулу загального члена ряду:

53.1. $\frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{13}{8} + \ldots$

53.2. $\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{19} + \ldots$

53.3. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{9}\right)^9 + \ldots$

53.4. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$

53.5. $\frac{1}{\ln^2 2} + \frac{5}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \ldots$

53.6. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots$

53.7. $3 + \frac{3^2\cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3\cdot 3!}{2^3} + \frac{3^4\cdot 4!}{2^4} + \ldots$

53.8. $\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{2\cdot 25}} + \frac{7}{\sqrt{3\cdot 125}} + \ldots$

53.9. $2 + \frac{2^2}{1\cdot 2} + \frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$

54. Перевірити виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

54.1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+...$

54.2. $\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt{\frac{5}{5}}+\sqrt{\frac{8}{9}}+...$

54.3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...$

54.4. $\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+...$

54.5. $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+...$

54.6. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{4}{7}}+\sqrt[3]{\frac{7}{12}}+...$

54.7. $\frac{3}{3}+\frac{5}{7}+\frac{7}{11}+...$

54.8. $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{6}}+\frac{6}{\sqrt{11}}+...$

54.9. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+...$

54.10. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\frac{3}{3001}+...$

55. Дослідити збіжність ряду з використанням ознаки порівняння:

55.1. $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+...$

55.2. $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+...$

55.3. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+...$

55.4. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+...$

55.5. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{2\cdot 5^3}+\ldots$

55.6. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots$

55.7. $\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{4}}+\ldots$

55.8. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\ldots$

55.9. $\frac{1}{8}+\frac{2}{27}+\frac{3}{64}+\ldots$

55.10. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot(1+1)}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot(1+4)}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot(1+9)}}+\ldots$

56. Дослідити збіжність ряду за ознакою Даламбера:

56.1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\ldots$

56.2. $\frac{2}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{8}{6!}+\ldots$

56.3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$

56.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

56.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$

56.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

56.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)!}$

56.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$

56.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n \cdot 2^n}}$

56.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$

56.11. $\frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + ...$

56.12. $\frac{1}{1 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{1}{5 \cdot 6!} + ...$

56.13. $\frac{3}{2} + \frac{3^2}{7} + \frac{3^3}{12} + ...$

56.14. $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^2} + ...$

56.15. $1 + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{4^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{4^3}{2^3 \cdot 7} + ...$

56.16. $\frac{3!}{3} + \frac{5!}{7} + \frac{7!}{11} + ...$

56.17. $\frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{49}{4 \cdot 5} + \frac{343}{8 \cdot 7} + ...$

56.18. $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + ...$

56.19. $\frac{3!}{1} + \frac{5!}{1 \cdot 8} + \frac{7!}{1 \cdot 8 \cdot 15} + ...$

56.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n (3n+1)}$

57. Дослідити збіжність ряду з використанням радикальної ознаки Коші:

57.1. $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + ...$

57.2. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + ...$

57.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

57.4. $\frac{2}{1}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{8}{11}\right)^3+\ldots$

57.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$

57.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

57.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

57.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

57.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$

57.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n^2+2}\right)^n$

58. Дослідити збіжність ряду за інтегральною ознакою Коші:

58.1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

58.2. $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\ldots$

58.3. $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots$

58.4. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots$

58.5. $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+...$

58.6. $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+...$

58.7. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+...$

58.8. $\frac{1}{1+1^4}+\frac{2}{1+2^4}+\frac{3}{1+3^4}+...$

58.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)}$

58.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

59. Дослідити збіжність знакозмінного ряду:

59.1. $1-2+3-4+...+(-1)^{n-1}\cdot n+...$

59.2. $-\frac{3}{7}+\frac{4}{10}-\frac{5}{13}+...$

59.3. $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}+...$

59.4. $1-\frac{2}{5}+\frac{2^2}{9}-\frac{2^3}{13}+...$

59.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 6^{n-1}}$

59.6. $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+\frac{5}{8}-\frac{7}{11}+...$

59.7. $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{7}{7}}-\sqrt{\frac{10}{9}}+...$

59.8. $\frac{3}{2}-\frac{3^2}{7}+\frac{3^3}{12}-...$

59.9. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$

59.10. $\frac{2^2}{1}-\frac{2^4}{6}+\frac{2^6}{11}-...$

59.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

59.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$

59.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$

59.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{6n-5}$

59.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

59.16. $1{,}1-1{,}01+1{,}001-\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)+...$

60. Дослідити збіжність числового ряду:

60.1. $1+\frac{3}{2\cdot3}+\frac{3^2}{2^2\cdot5}+\frac{3^3}{2^3\cdot7}+...$

60.2. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^2}+\frac{4!}{4^2}+...$

60.3. $\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot4}+\frac{5!}{2\cdot4\cdot6}+\frac{7!}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+...$

60.4. $\frac{1\cdot3}{1}+\frac{3\cdot3^2}{1\cdot5}+\frac{5\cdot3^3}{1\cdot5\cdot9}+...$

60.5. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot3^3}}+\frac{13}{\sqrt{4\cdot3^4}}+...$

60.6. $\frac{5}{5}+\left(\frac{8}{7}\right)^2+\left(\frac{11}{9}\right)^3+\left(\frac{14}{11}\right)^4+\ldots$

60.7. $\frac{21}{3}+\frac{41}{9}+\frac{61}{27}+\ldots$

60.8. $\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right)+\left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2+\left(\frac{9}{4}\cdot 4\right)^3+\ldots$

60.9. $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{7}{7}}-\sqrt{\frac{10}{9}}+\ldots$

60.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n^2+4}}$

Тема 8.2. Степеневі ряди

61. Знайти область збіжності степеневого ряду:

61.1. $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots$

61.2. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2\cdot 10}+\frac{x^3}{3\cdot 10^2}+\ldots$

61.3. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots$

61.4. $1+x+1\cdot 2\cdot x^2+1\cdot 2\cdot 3\cdot x^3+\ldots$

61.5. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3+\sqrt{3}}+\ldots$

61.6. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

61.7. $10x+100x^2+1000x^3+\ldots$

61.8. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

61.9. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

61.10. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots$

61.11. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\, x^{2n-2}$

61.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+11)^n}{n^2 \cdot 4^n}$

61.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n \cdot (x+2)^n}{n}$

61.14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{5^{n-1}\sqrt{n}}$

61.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

61.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n(n+2)}$

62. Розкласти функцію у ряд Маклорена:

62.1. $f(x) = xe^{-x^2}$

62.2. $f(x) = 2^{x^2}$

62.3. $f(x) = \cos 4x$

62.4. $f(x) = \sin^2 x$

62.5. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

62.6. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)$

62.7. $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$

62.8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8 - x^3}}$

62.9. $f(x) = x\cos 4x$

63. Обмежуючись трьома першими членами розкладу підінтегральної функції у ряд Маклорена, знайти наближене значення визначеного інтеграла:

63.1. $\int_0^{1/2} e^{-2x^2} dx$ **63.2.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$

63.3. $\int_0^{1} \mathrm{Cos}(x^2) dx$ **63.4.** $\int_0^{1/4} e^{-x} dx$

63.5. $\int_{0,3}^{1/2} \frac{\ln(x+1)}{x}\, dx$ **63.6.** $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{arctg}x}{x}\, dx$

63.7. $\int_0^{1/4} \sqrt[4]{1+x^2} dx$ **63.8.** $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1-x^2} dx$

63.9. $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Валєєв К.Г. Вища математика для економістів / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, С.В. Дегтяр. – К.: Знання, 2011. – 287 с.

2. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навч. посіб. / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2011. – 448 с.

3. Вища математика із використанням інформаційних технологій / В.П. Іващенко, Г.Г. Швачич, В.С. Коноваленков та ін. – Запоріжжя: Дике Поле, 2013. – 426 с.

4. Зайцев Є.П. Вища математика: навч. посіб. / Є.П. Зайцев.– Кременчук: Вид-во "Кременчук", 2011. – 170 с.

5. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити-Дана, 2010. – 479 с.

6. Практикум з навчальної дисципліни «Вища математика для економістів» на основі MatLab / С.М. Чистов, А.Є. Никифоров, Т.Ф. Куценко та ін. – К.: КНЕУ, 2008. – 190 с.

7. Radulesku T.-L.T., Radulesku V.D., Andreescu T. Problems in real analysis: advanced calculus on the real axias, Springer, 2009.

8. Trench W.F. Inrtroduction to real analysis, Pearson Education, 2010.

9. Matthews K.R. Elementary linear algebra, University of Queensland, 1991.

10. Siceloff L.P., Wentworth G., Smith D.E. Analytic geometry, Ginn and Company, Boston-New York, 1970.

Додаткова

1. Ланцова О.Ю. Высшая математика для экономистов / О.Ю. Ланцова, Е.Н. Сахарова, В.И. Малахин. – М.: Экономика, 2010. – 351 с.

2. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.

3. Carl P. Simon and Lowrence Blume. Mathematics for Economists, W.W. Norton & Compony, 1994.

4. Smirnov V.I. A course of higher mathematic. Vol. 1, 2. Pergamon Press, Oxford – London – Edinburgh – New York – Paris – Frankfurt, 1964.

5. Problems in Mathematical Analysis. Under the editorship of B. Demidovich. – Moscow: Mir Publishers, 1972.

Навчальне видання

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Збірник завдань для самостійної роботи

Редактор М.С. Велес

Підписано до друку 14.03.2017. Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 4,88. Тираж 60 пр. Зам. № .

ВНЗ «Університет імені Альфреда Нобеля».
49000, м. Дніпро, вул. Січеславська Набережна, 18.
Тел. (056) 778-58-66, e-mail: rio@duan.edu.ua
Свідоцтво ДК № 5309 від 20.03.2017 р.

Віддруковано у ТОВ «Роял Принт».
49052, м. Дніпро, вул. В. Ларіонова, 145.
Тел. (056) 794-61-05, 04
Свідоцтво ДК № 4765 від 04.09.2014 р.